# PRÆCISIONSMATHEMATIKENS TILBLIVEN FRA PYTHAGORAS TIL EUKLID[1]).

AF

H. G. ZEUTHEN.

Den forrige skandinaviske Mathematikerkongres blev indledet med et Foredrag af den fremragende Ophavsmand til disse Møder, Prof. *Mittag-Leffler*, om den nuværende Præcisionsmathematik, bygget paa Dannelsen af de hele Tal, saaledes som den er sat fuldkommen i System ved *Weierstrass*. Denne afløser en anden Præcisionsmathematik, hvis Nøjagtighed man nu let undervurderer, fordi den i den elementære og højere Undervisning jævnlig fremtræder i mere eller mindre tilfældige Brudstykker, men som af sine Bygmestere fra *Pythagoras* gjennem *Platon* og *Eudoxos* til *Euklid* var anlagt til at være fuldtud exakt. Den tager i Modsætning til det nysnævnte moderne System den kontinuert varierende Størrelse, fremstillet ved Længden af en ret Linie, til sit Udgangspunkt, gaar altsaa ud fra at betragte en saadan Størrelse som existerende. Paa Grund af denne Fremstillingsmaade er den geometrisk; men dens Figurer ere tillige bestemte til, som vore Formler, at give en vel defineret Fremstilling af Relationer mellem almindelige Størrelser. Vi kjende den bedst fra *Euklids* Elementer, der rigtignok saa maa læses i den Aand, hvori de ere skrevne, og hvorom de øvrige fra Oldtiden opbevarede Dokumenter give Vidnesbyrd. Omvendt er det kun ved grundig Indtrængen i *Euklids* Elementer, at man ret forstaar disse Dokumenter; men saa

[1]) Det samme Emne bliver behandlet i større Fuldstændighed og i Sammenhæng med Mathematikens hele Udviklingshistorie i den Fremstilling, som jeg giver af Mathematiken i Oldtid og Middelalder i det snart udkommende Bind om »Mathematik« af »Die Kultur der Gegenwart« (Teubner).

give de ogsaa et ret klart Indblik i, hvorledes det exakte mathematiske System, som foreligger i færdig Skikkelse hos *Euklid*, er blevet til.

Dannelsen af dette System begynder med *Pythagoras*, hvad der ingenlunde vil sige det samme, som at den mathematiske Viden begyndte med ham. Selve den pythagoræiske Læresætning var længe før hans Tid kjendt af Inderne. Om det særlig var noget af deres Viden, der var trængt frem til Grækerne, vide vi ikke; men i hvert Fald besad Grækerne ogsaa før *Pythagoras* adskillig praktisk mathematisk Viden. Et mathematisk System bliver først til, naar der foreligger et Materiale, hvoraf det kan dannes, og mere eller mindre vel begrundede Kundskaber, hvori det kan bringe Orden og Klarhed.

Udgangspunktet for Dannelsen af et saadant System var Opdagelsen af de irrationale Størrelser. Om denne skyldes *Pythagoras* selv eller en af hans Disciple, lader sig næppe afgjøre; thi allerede paa *Aristoteles*' Tid kunde man ikke sætte Skjel imellem, hvad der er fundet af de enkelte Pythagoræere. Denne Skole naaede imidlertid saa langt frem i en Udvikling, der tydelig peger tilbage paa det nævnte Udgangspunkt, og som selv maa have krævet nogen Tid, at den omtalte store Opdagelse i hvert Tilfælde maa skyldes de allerførste Pythagoræere, og da vel snarest selve den Mester, som disse satte saa højt. Studiet af de irrationale Størrelser er ogsaa strax sat i Forbindelse med den pythagoræiske Læresætning.

Pythagoræerne havde fra først af haabet at kunne lægge de hele Tal til Grund for Mathematiken. »Tingene ere Tal«, sagde de, og tillagde forskellige Taldannelser en mystisk Betydning. Deres Interesse for hele Tal maatte særlig styrkes ved den store fysiske Opdagelse, at Længderne af iøvrigt ens Strenge, som frembringe harmoniske Toner, forholde sig som simple hele Tal, og mere bestemt, at samme Talforhold mellem Strengenes Længder giver samme Toneinterval, saaledes Forholdet 2 : 1 et Interval paa en Oktav. Hypothetisk antog de da ogsaa ved andre Naturforklaringer simple Talforhold, og ved Udregninger af Kvadratrødder kunde det ikke tilfredsstille dem i Stedet for Brøker dannede af bestemte Tal kun at finde de for de foreliggende Anvendelser tilstrækkelige Tilnærmelser.

Til Brug af Kvadratrødder maatte allerede Musiken give Anledning. For at dele en Oktav, frembragt ved Strænge af Længderne 2 og 1, i to ligestore Dele, hvad det laa nær at forsøge, fik man Brug for en Streng med Længden $\sqrt{2}$. Denne Længde kunde tilvejebringes som Diagonal i et Kvadrat med Siden 1; men det maatte

strax vise sig, at den ved Siden af Strengene 2 og 1 gav Mislyd, et Forvarsel om Irrationaliteten af $\sqrt{2}$. Musikalsk Tilfredsstillelse fik man derimod af de Tilnærmelser til denne Mellemproportional mellem 1 og 2, som først tilbød sig. Middeltallet $\frac{3}{2}$ mellem 1 og 2 gav en Tone, hvis Intervaller fra dem, Strengene 1 og 2 giver, ere en Kvint og en Kvart. For at faa de samme Intervaller i omvendt Orden brugte man den harmoniske Mellemproportional $\frac{4}{3}$. Proportionen mellem disse eller de tilsvarende hele Tal $6:8 = 9:12$ kaldtes den musikalske, og Pythagoræerne tillagde den ogsaa i andre Henseender stor Betydning.

Den her paabegyndte Dannelse af Tilnærmelsesværdier til en Kvadratrod, der jo altid kan opfattes som en Mellemproportional, fik ogsaa Anvendelse i andre Tilfælde, og ved Gjentagelse af den samme Indskyden af Middeltal og harmonisk Mellemproportional mellem de ad denne Vej alt fundne Værdier kunde man naa en saa stor Tilnærmelse, som man vilde. For $\sqrt{2}$'s Vedkommende fik man en hurtigere Tilnærmelse i Værdierne $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12} \cdots$, hvis Tæller og Nævner $y$ og $x$ tilfredsstille Ligningen $y^2 - 2x^2 = \pm 1$, og stedse udledes af den foregaaende Brøks, $y_1$ og $x_1$, ved $y = 2x_1 + y_1$, $x = x_1 + y_1$. Herfor fører *Euklid* i II 9 og 10 geometriske Beviser, hvad der vidner om den Interesse, man endnu paa hans Tid bevarede for disse gamle Tilnærmelser.

Ad ingen af disse Veje kommer man til Ende og finder et nøjagtigt Udtryk for $\sqrt{2}$ som Forhold mellem hele Tal. Netop Pythagoræernes store Interesse for disse bragte dem da til at spørge, om et saadant Udtryk overhovedet er muligt. De fandt Svaret Nej, og begrundede det ved følgende Betragtning, som *Aristoteles* ofte omtaler, og som jeg her gjengiver med moderne Tegn. Var $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, hvor $m$ og $n$ ere indbyrdes primiske hele Tal, maatte man have $m^2 = 2n^2$, altsaa $m$ være et lige og derfor $n$ et ulige Tal. Sættes nu $m = 2r$, blev $2r^2 = n^2$, altsaa $n$ lige. Det kan ikke paa en Gang være lige og ulige. Forudsætningen er altsaa umulig. Ganske sikkert har man i fuld Overensstemmelse hermed sluttet, at $\sqrt{3}$ er irrational, da ellers et Tal paa en Gang maatte være deleligt og ikke deleligt med 3, og paa lignende Maade behandlet Spørgsmaalet om andre Kvadratrødders Irrationalitet. At denne Begrungelse dog trænger til et Supplement, har man, som vi skulle se, senere bemærket.

Da nu ikke alle Størrelsesforhold kunde udtrykkes som Forhold mellem hele Tal, indsaa man dels, at der behøvedes andre Midler end Tal til Fremstilling af Størrelser, dels at saadan Begrundelse, som i

nogen Maade er bygget paa Regning, der jo netop forudsætter Fremstilling ved Tal, ikke er anvendelig paa alle Størrelser. Det nye paa alle Størrelser anvendelige Fremstillingsmiddel fandtes i Geometrien. I Stedet for at operere med $\sqrt{2}$ opererede man med Diagonalen i et Kvadrat, hvis Side er given, og den pythagoræiske Læresætning tillader en lignende Fremstilling af andre Kvadratrødder. De kontinuert varierende Størrelser fremstilledes i det hele ved Længder af rette Linier. Saadanne kunne adderes og subtraheres. I Stedet for deres Produkt betragtede man Størrelsen af det deraf dannede Rektangel. En som Rektangel fremstillet Størrelse divideredes med en given, ved at Rektanglet omdannedes til et nyt med denne til Side eller, som man sagde, lagdes langs den. Kvadratroden af en som Rektangel fremstillet Størrelse $ab$ fremstilledes som Side i et Kvadrat af samme Størrelse og blev konstrueret ved den pythagoræiske Sætning, idet $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Overgangen mellem Fremstilling ved Længder og Arealer kunde ske gjennem Rektangler med Siden 1.

Med disse formelle Begrebsudvidelser forbandt man reelle Fremskridt, navnlig Løsningen af Ligninger af anden Grad, der ved Begrebsudvidelserne blev lige anvendelig paa irrationale og paa rationale Størrelser. Den nuværende algebraiske Løsning beror paa, at $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, og opnaas ved en saadan Omflytning af Leddene i Ligningen, at den ene Side, som indeholder den ubekjendte, antager denne Form, medens den anden er bekjendt. De anførte Formler fremtræde umiddelbart ved Deling af et Kvadrat med Siden $a + b$ eller $a$. En Ligning af 2. Grad fremtræder som den Opgave langs en given ret Linie at lægge et Rektangel med givet Areal saaledes, at der enten mangler et Kvadrat, eller et Kvadrat bliver tilovers, med andre Ord saaledes, at det overskydende eller manglende Stykke af Linien bliver ligestort med Rektanglets Højde (det saakaldte elliptiske eller hyperbolske Fladeanlæg). De Figurer, hvorved disse Opgaver tænkes løste, omdannes ved saadanne Omlægninger af deres Dele, som ganske svare til de nys omtalte Omflytninger af en algebraisk Lignings Led. Dertil knyttes, som vi nu gjør, Mulighedsbetingelser og Bestemmelsen af Størrelser, hvis Produkt (Rektangel) og Sum eller Differens have givne Størrelser. Figurerne spille her samme Rolle som det nuværende algebraiske Sprogs Formler. Ere Figurerne nøjagtig definerede, danne de et ligesaa exakt Organ for Algebraen som nu Tegnsproget, der først kommer op paa Højde med den antike Fremstilling, naar man udtrykkelig har forklaret, hvad der skal for-

staas ved Regning med irrationale Tal, en Operation, som Grækerne undgaa ved deres geometriske Omskrivning.

Den her beskrevne geometriske Algebra er fremsat i *Euklids* 2. Bog paa Grundlag af Sætningerne i 1. Bog. At Pythagoræerne vare komne saa vidt, fremgaar af, hvad der kom frem umiddelbart efter dem eller hos de sidste af dem. Det prægtige Stykke Geometri, som er opbevaret os i *Hippokrates'* Kvadratur af visse Halvmaaner, viser, at man var naaet til i Realiteten at beherske det meste af den elementære Geometri, og det Standpunkt, hvortil den formelle Behandling, som her særlig interesserer os, var naaet, træder frem i de Bestræbelser, som da særlig optog Mathematikerne. Man maatte have en bestemt og klar Angivelse af, hvorledes de Størrelser, som man vikde undersøge ved de geometriske Hjælpemidler, kunne fremstilles geometrisk. En saadan havde man allerede for Kvadratrødders Vedkommende. Opgaven om Terningens Fordobling eller Multiplikation, eller om, naar Kanten $a$ i en Terning er given, at finde Kanten $a\sqrt[3]{m}$ i en $m$ Gange saa stor Terning, gik ud paa at finde en tilsvarende Fremstilling af Kubikrødder. Den samme Opgave fik ogsaa en anden Skikkelse, som sluttede sig til den antike Fremstilling af Potenser ved Leddene i en sammenhængende Række Proportioner: $a:b = b:c = c:d \cdots$, eller, som vi nu sædvanlig sige, i en Kvotientrække: $(n+1)^{te}$ Leds Forhold til $1^{ste}$ Led er det samme som $n^{te}$ Potens af andet Leds Forhold til $1^{ste}$, dette sidste Forhold altsaa som $n^{te}$ Rod af det første. Uddragning af $n^{te}$ Rod bliver altsaa det samme som Indskydning af $n - 1$ Mellemproportionaler, Kvadratrodsuddragning som Indskydning af 1, Kubikrodsuddragning af 2 Mellemproportionaler. Den sidste fremragende Pythagoræer, *Archytas*, søger at indskyde 2 Mellemproportionaler ved at benytte Kuglen paa en Maade, der svarer til Anvendelsen af Cirklen ved Bestemmelsen af 1 Mellemproportional. Det lykkedes ham at løse Opgaven ved Skjæring af Kuglen med en Kurve, der bestemmes som Skjæringslinie mellem en Omdrejningskegle og en Tore. Det siger sig selv, at man ikke derved bekvemt kunde faa en taalelig Tilnærmelse til den søgte Kubikrod. Saa godt regnede Grækerne sikkert, at de vare i Stand til ved numeriske Forsøg lettere at finde en bedre Tilnærmelse. Men det var noget andet, der tilsigtedes, nemlig at faa en geometrisk vel defineret Fremstilling af disse Størrelser og derved at sikre den geometriske Existens, som Anvendelsen af den geometriske Algebra krævede. Det var det samme og kun det, som snart efter opnaaedes ved den samme Opgaves Løsning ved Keglesnit.

Lignende Formaal havde Cirklens Kvadratur. Tilnærmede Bestemmelser havde man allerede fra Ægypterne, og søgte man ikke andet, havde der intet været at indvende mod *Antiphon*, der benyttede indskrevne Polygoner med voxende Sidetal. Hvad der derimod ikke var tilladt, var at betragte Existensen af Cirklens Areal som sikret ved den blotte Angivelse af, at den skulde være Grænsen for saadanne Polygoner. Da nu Forsøgene, saaledes *Hippokrates*', paa at løse Opgaven ved ret Linie og Cirkel mislykkedes, tyede man til andre Kurver, som man næppe har lagt an paa at konstruere med særlig stor Nøjagtighed, men som vare vel definerede, nemlig Kvadratrix og *Archimedes*' Spiraler. Derved blev Cirklens Areal og Periferi ogsaa til vel definerede geometriske Størrelser. De samme Kurver kunde benyttes til Deling af en Vinkel i et hvilket som helst Antal ligestore Dele.

Pythagoræerne naaede dog ikke at tage alle Konsekvenser af deres Opdagelse af de irrationale Størrelser og paa alle Punkter at give ogsaa Behandlingen af disse Størrelser et fuldt exakt Grundlag. Deres geometriske Fremstilling omfattede vel disse, men de havde ikke noget exakt Udtryk for deres Forbindelse med de ved hele Tal og Brøker givne diskrete Størrelser. Dog vedblev man endnu at overføre Resultater vundne ved Behandling af diskrete Størrelser paa kontinuert varierende. Som nys berørt anvendte man saaledes Proportioner, hvis Theori foreløbig kun var bygget paa Forhold mellem hele Tal og altsaa ikke paa exakt Maade omfattede Forhold mellem inkommensurable Størrelser. Overgangen til saadanne synes Pythagoræerne at have villet støtte paa en Deling i uendelig mange uendelig smaa Dele. Denne træder frem deri, at de kaldte Punkter »Enheder med Beliggenhed« og altsaa deraf sammensatte Linier, Flader og Legemer som Flerheder. Forholdet mellem to Størrelser blev da Forholdet mellem de uendelige Antal af Punkter, de indeholdt.

Vi kjende nærmest denne Opfattelse gjennem den eleatiske Filosof *Zenon*, der i sin mod Pythagoræerne rettede Polemik viser, at »Tingene ikke ere Flerheder«, altsaa at man ikke kan naa fra Betragtning af det diskrete til det kontinuerte, altsaa heller ikke til den kontinuerte Bevægelse. *Paul Tannery* har i sin Bog »Pour la science hellène«, hvor han saa klart fremdrager de gamle, saakaldte Naturfilosoffers Tankegang, paa en slaaende Maade vist, hvorledes særlig de af *Zenons* Paralogismer, der vedrøre Bevægelse, gribe ind i hinanden og efterhaanden imødegaa de Indvendinger, som man fra modsat Side kunde forsøge at opstille mod de foregaaende. Vi skal her holde os til

*Tannerys* Forklaring af den sidste af disse Paralogismer. Den besvarer et Forsøg paa at imødegaa de foregaaende, hvori Bevægelsens Umulighed navnlig grundes paa, at Rummet kan deles i det uendelige, ved at henvise til, at det samme er Tilfældet med Tiden. For at vise Utilstrækkeligheden af denne Henvisning bemærker *Zenon*, at hvis Bevægelse overhovedet er mulig, maa der ogsaa existere Bevægelse med forskellig Hastighed. Dette bevises ved Henvisning til den relative Hastighed af Punkter, der bevæge sig med samme Hastighed i modsat Retning. Naar imidlertid Bevægelse af et Punkt skal bestaa i, at det passerer den uendelig lille Rumenhed i den uendelig lille Tidsenhed, Momentet, faar man kun en bestemt Hastighed.

*Zenon* har fuldkommen Ret i, at man ikke kan naa over til Sætninger om det kontinuerte fra Sætninger om det diskrete blot ved Brug af saadanne Ord som uendelig. En ny Forudsætning er nødvendig enten for, som vi nu gjøre, at definere det ved dette Ord betegnede Begreb, eller for, saaledes som de senere græske Mathematikere gjorde, at omgaa det. *Zenon* kjendte ingen saadan Forudsætning, og idet han ikke vilde anerkjende Existensen af andet, end hvad der var til for hans Tanke, nægtede han Kontinuitet og Bevægelse. Dette kunde de arbejdende Mathematikere ikke. De vedblev foreløbig at benytte de ufuldstændig begrundede Sætninger om Proportioner, og som senere Renæssancens Mathematikere, *Kepler* og *Cavalieri*, ja de fleste af Mathematikerne i det 18de Aarhundrede, arbejdede man indtil videre med et Uendelighedsbegreb, af hvilket man ikke gav nogen klar Bestemmelse. Det var saaledes, saa vidt man kan se, ved at dele en Pyramide eller en Kegle i uendelig mange, uendelig tynde Skiver, at *Demokrit* fandt, at den er Trediedelen af et Prisme eller en Cylinder med samme Højde og Grundflade. Denne Bevisførelse blev ikke godkjendt senere, men dog, som vi se hos *Archimedes*, brugt til at finde de Resultater, som man bag efter sikrede ved et Exhaustionsbevis, der netop benytter den samme Dekomposition, men tillige giver den Beviskraft. Saavel dette Bevis som en ny og exakt Proportionslære blev støttet paa en af *Eudoxos* opstillet Forudsætning, der afhjælper den af *Zenon* paaviste Mangel.

*Eudoxos*, *Platons* Samtidige og Medarbejder paa forskellige Omraader, har ikke altid været sat paa den høje Plads, som han fortjener i Videnskabens Historie. I Tillid til *Hippareh*, som paa hans Bekostning fremhæver de senere store Fremskridt i astronomisk Iagttagelse, have Astronomerne sat ham for lavt, indtil *Schiaparelli* af Beret-

ningerne om hans Lære om Planetbevægelserne har faaet den fine kinematiske Sammensætning af Rotationer frem, hvorigjennem han beskriver disse Bevægelser. Og Mathematikerne tillægge haardnakket *Archimedes* Opstillingen af den Forudsætning, som danner Grundlaget for hans Infinitesimalundersøgelse, skjønt netop *Archimedes* baade i Fortalen til Skriftet om Parablens Kvadratur omtaler den som forud kjendt og anvendt af *Euklid*, og i den for nylig fundne Methodelære tydelig peger hen paa *Eudoxos* som Ophavsmand. Denne Forudsætning gaar ud paa, at af to Størrelser, som overhovedet kunne sammenlignes, den ene kan gjentages saa tidt, multipliceres med et saa stort helt Tal, at Produktet bliver større end den anden. Den tillader, som det er gjort i *Euklid* V—VI, at bygge en exakt Proportionslære paa følgende Bestemmelse af to Forholds Ligestorhed eller Uligestorhed: $a:b = c:d$, naar $m$ og $n$ betegne vilkaarlige hele Tal, og $ma \gtreqless nb$ medfører $mc \gtreqless nd$, og $a:b > c:d$, naar der existerer Værdier af $m$ og $n$, for hvilke $ma > nb$, men $mc < nd$. Som det ses, falder denne Bestemmelse ganske sammen med *Dedekinds* Snitmethode. Paa den nævnte Forudsætning ere ligeledes *Euklids* og *Archimedes*' Exhaustionsbeviser byggede.

Af de senere Forbedringer se vi, at ogsaa Pythagoræernes Opstilling af Irrationalitetsbegrebet og af Kjendetegn paa, om Størrelser ere irrationale, endnu vare noget usikre. *Theodor* fra Kyrene, der har Fortjenester af Overførelsen af den pythagoræiske Mathematik til Athen, opstillede derfor Begrebet Inkommensurabilitet. Som det, sikkert i Tilslutning til ham, læres i Begyndelsen af *Euklids* 10. Bog, lader det sig prøve, om to Størrelser ere kommensurable eller inkommensurable, ved paa dem at anvende den Operation, hvorved man søger største fælles Maal. Kommer man til Ende dermed, ere de kommensurable, men fortsættes den i det uendelige, ere de inkommensurable. Ad denne Vej lader det sig paavise, at Kvadratroden af et forelagt Ikke-Kvadrattal er inkommensurabel med Enheden; thi det vil som bekjendt vise sig, at den nævnte Operation, der er den samme som den, hvorved man vilde udvikle Roden i Kjædebrøk, bliver periodisk og altsaa aldrig kommer til Ende. Paa denne Maade — og vistnok kun paa den — forstaar man, at *Theodor* har ført særskilte Beviser for, at $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \cdots \sqrt{17}$ ere irrationale.

Dette sidste meddeles af *Platon* i hans Dialog: *Theaitet*, hvor vi tillige erfare, at *Theaitet* har ført almindelige Beviser for Rodstørrelsers Irrationalitet. De Mangler, man har fundet i den ældre pythagoræiske

Begrundelse, fremgaa tydelig af den Maade, hvorpaa de ere afhjulpne i *Euklids* 7. Bog, og som i sine Grundtræk tør antages at skyldes *Theaitet*. De Beviser, som følge i 8. Bog, for Irrationaliteten af en Rod af en uforkortelig Brøk, hvis Tæller og Nævner ikke begge ere Potenstal med samme Exponent som Roden, forberedes her ved en nøjagtig Undersøgelse af Tals Sammensætning af Faktorer. Her forekommer f. Ex. den Sætning, at, naar to uforkortelige Brøker ere ligestore, bliver Tæller lig Tæller, Nævner lig Nævner.

Den Interesse for mathematiske Undersøgelser af en yderst abstrakt Karakter, som træder os imøde i *Platons* Meddelelse om *Theaitet*, lægger han ogsaa for Dagen paa andre Steder. Det er da ogsaa i Kredsen af hans og *Eudoxos*' Disciple, at Præcisionsmathematiken arbejder sig frem mod den Skikkelse, som for den elementære Mathematiks Vedkommende foreligger fuldt færdig hos *Euklid*. De to Hovedvanskeligheder vare overvundne af *Eudoxos* og *Theaitet*; men en Præcisionsmathematik er overhovedet kun mulig i et System, hvor hver Sætning er bygget paa en foregaaende eller i sidste Instans paa Forudsætninger, som man udtrykkelig fastslaar. Paa Grund af den geometriske Form, som ogsaa den almindelige Størrelseslære havde antaget, maatte Sætningerne ikke blot være Læresætninger om de alt indførte Begreber; men disse Begrebers geometriske Existens maatte sikres ved nøjagtig angivne Konstruktioner. Disse føres hos *Euklid* i sidste Instans tilbage til saadanne, som praktisk udføres ved Lineal og Passer; men det er urigtigt at betragte Brugen af disse Instrumenter som Grundlag for den antike Geometri. Denne Brug vil jo ligesaa vel som numerisk Udregning af Rødder kun give tilnærmede Bestemmelser. Derfor nævner *Euklid* slet ikke disse Redskaber; men han giver i de opstillede Forudsætninger Oplysning om de Egenskaber ved ret Linie og Cirkel, som han maa forudsætte.

Disse Forudsætninger maa man nu ikke søge i de saakaldte Definitioner, som i Reglen blot indføre de Benævnelser, han vil gjøre Brug af. De Egenskaber, som nærmere skulle karakterisere de indførte Begreber, og som der bliver Brug for i de paafølgende Undersøgelser, opstilles derimod i de saakaldte Postulater. Her karakteriseres f. Ex. en ret Linies Beliggenhed ved den Egenskab, at den er bestemt ved to af dens Punkter, dens ubegrænsede Forlængelse postuleres, og der opstilles den tilstrækkelige Betingelse for, at to rette Linier i samme Plan skulle skjære hinanden til en bestemt Side o. s. v. Jeg vil ikke gaa i det enkelte, men skal kun bemærke, at man ved nøje at studere de af *Euklid* opstillede Forudsætninger og lægge Mærke til,

hvorledes han bruger dem, vil se, at han derved tilstræber det samme Formaal som de, der i vore Dage opstille det logiske Grundlag for Geometrien. De ere blot naaet videre paa den allerede af ham anviste Bane, nemlig ved ogsaa udtrykkelig at nævne Forudsætninger, som han har betragtet som saa selvfølgelige, at han har brugt dem uden at nævne dem. Dette gjælder saaledes Forudsætningerne om Ordningen af Punkter paa en ret Linie, og om lukkede Konturer i en Plan, som en Linie, der forbinder et indre med et ydre Punkt, altid maa skjære. Endelig findes det saakaldte Bevægelsespostulat eller Postulatet om, at der overhovedet gives kongruente Figurer, kun indirekte hos *Euklid*, idet et Axiom udtaler, at kongruente Figurer ere lige store. Endnu mindre bliver der da Tale om at opløse dette ret sammensatte Postulat i sine Enkeltheder.

I *Euklids* Geometri har den gamle Præcisionsgeometri naaet sin endelige Skikkelse. Umiddelbart gjælder dette dog kun for den elementære Geometri, den, der kan nøjes med Konstruktioner ved ret Linie og Cirkel, og som algebraisk talt omfatter Spørgsmaal, der afhænge af Ligninger af anden Grad; men den, der vilde gaa videre, saaledes som vi have set, at man var ogsaa før *Euklid*, maatte følge de samme Principer, som ere lagte til Grund for Opførelsen af Elementerne. Dette iagttager navnlig *Archimedes* med Hensyn til de nye Spørgsmaal, som han underkaster en streng mathematisk Undersøgelse. Han opstiller udtrykkelig Forudsætningerne for sin Statik og ligeledes de Forudsætninger, som ere nødvendige for at kunne tale om en krum Linies Længde; thi *Euklids* Elementer tilstede kun at sammenligne Længder af rette og brudte Linier eller af Buer af samme Cirkel indbyrdes. For Udmaalingen af krumme Linier eller Bestemmelsen af deres Forhold til rette Linier lægger han følgende to Forudsætninger til Grund: Den rette Linie er den korteste Vej mellem to Punkter, og: af to (krumme eller brudte, plane) Linier mellem 2 Punkter, der vende Konvexiteten til samme Side, er den yderste størst. Disse Forudsætninger definere, som vi nu sige, en krum Linies Længde, og at betragte den første som en ny Definition af en ret Linie, vilde staa i fuldkommen Strid med *Archimedes*' nøjagtige Tilslutning til *Euklids* Forudsætninger og med den Brug, han gjør af de nye Forudsætninger. Lignende Forudsætninger anvender han til at indføre Begrebet: en krum Flades Areal.

Jeg har her vist, hvorledes den antike Præcisionsgeometri er bleven til, og jeg har samtidig fremdraget flere af dens Hovedpunkter. Dette sidste har været nødvendigt, fordi man i de senere Aarhundreder

jevnlig har blandet det antike exakt geometriske Udgangspunkt og moderne arithmetiske Betragtninger, der foreløbig ikke altid kunde være exakte, sammen og har brugt *Euklids* Elementer til at lære Børn ikke den gamle strenge Videnskab, men en moderniseret Mathematik og da jevnlig sat en ydre Anskuelighed i Stedet for *Euklids* klart formulerede Begrundelser. Dette maatte give for ringe Tanker om det gamle System, som har faaet Skylden for de logiske Svagheder, der opstaa, naar man ikke tager et fast Udgangspunkt, nemlig *enten* det gamle geometriske, *eller* det moderne arithmetiske. I vor Tid, da man besidder en paa Arithmetik grundet Algebra, er man tillige tilbøjelig til at overse, at den græske Geometri er bestemt til ogsaa at omfatte algebraiske Undersøgelser.

---